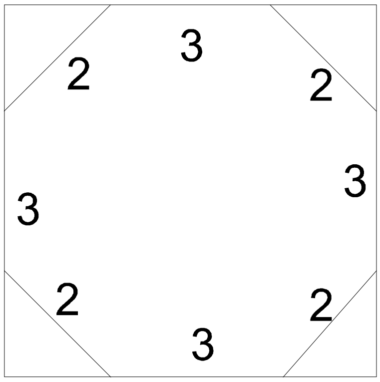
Fünfte Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufen 9 / 10 Die Lösungen der 2. Runde

Aufgabe 1 (Lösung, 5P):

Die Strecken von den Ecken zum Umkreismittelpunkt teilen das Achteck in acht gleichschenklige Dreiecke, von denen je vier kongruent sind. Durch Umordnen dieser Dreiecke erreicht man folgende zum Quadrat ergänzbare Figur:



Die Seitenlänge des Quadrats beträgt $3+2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt somit $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=17+12\sqrt{2}$.

Die vier Dreiecke besitzen einen Inhalt von $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=4$.

Der Flächeninhalt des Achtecks ergibt sich daher zu $13+12\sqrt{2}\approx 29{,}9706$

Aufgabe 2 (Lösung, 5P):

Der Bruch ist kürzbar, wenn sein Kehrbruch kürzbar ist. Dieser läßt sich umformen

(Ganze herausziehen): $\frac{n^2+2}{n-3}=\frac{n^2-9+11}{n-3}=n+3+\frac{11}{n-3}$.

Der Bruch ist genau dann kürzbar, wenn n-3 ein Vielfaches von 11 ist, d.h., n die Form n = k*11+3 hat (k sei dabei eine beliebige natürliche Zahl). Die kleinsten Werten von n sind 14, 25, 36, 47, 58,...

Aufgabe 3 (Lösung, 5P):

$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2 \Leftrightarrow 3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 \geq 0$

Die linke Seite läßt sich umformen zu $2a^4-2a^3-2a+2$
Faktorisierung ergibt $2(a-1)(a^3-1)$.
Für a = 1 ergibt sich Null, für a ungleich 1 haben beide Klammern das gleiche Vorzeichen, also ist der Term positiv. Daraus folgt die Behauptung.