Fünfte Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufe 11
Die Lösungen der 1. Runde

Aufgabe 1:

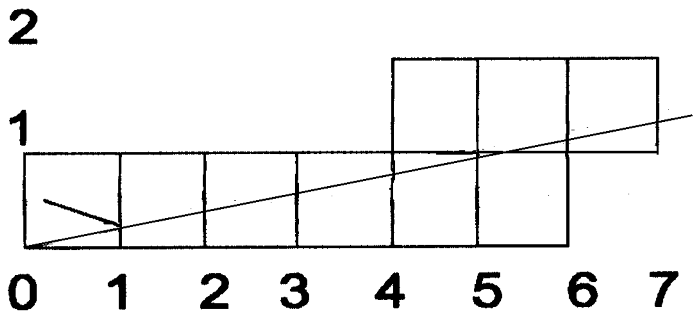
Wir nummerieren die Farben: braun: 1, grün: 2, gelb: 3, rot: 4.
n_i sei die Anzahl der Frösche mit Farbe i, also z.B. anfänglich $n_1 = 50$.
Wir vergleichen die Differenz zweier Anzahlen $n_i - n_k$ vor und nach einem Treffen ($i \neq k$).
Fall 1: Farbe i wird neu gebildet. n_i wird um 2 erhöht, n_k um 1 verringert. n_i-n_k wächst um 3.
Fall 2: Farbe k wird neu gebildet. n_k wird um 2 erhöht, n_i um 1 verringert. n_i-n_k verringert sich um 3.
Fall 3: Weder Farbe i noch k wird neu gebildet. n_i und n_k werden um 1 verringert. n_i-n_k ändert sich nicht.
Bei jedem Treffen ändert sich also n_i-n_k um null oder drei.
Gehören i und k zu ausgestorbenen Farben, so ist am Schluss n_i-n_k= 0. Die Anzahlen der drei ausgestorbenen Farben müssen sich ursprünglich um Vielfache von drei unterschieden haben.
Bildet man die Differenzen der Zahlen 50, 57, 62 und 68, so sieht man leicht, dass nur die drei Zahlen 50, 62 und 68 durch drei teilbare Differenzen (nämlich 6, 12 und 18) haben.
Demnach bleiben die grünen Frösche übrig.

Wie viele davon haben überlebt?

Es sei b die Zahl der Treffen, bei denen zwei neue braune Frösche erschaffen worden sind. Entsprechend werden die Zahlen g (für grün), g’ (für gelb) und r definiert.
Da alle roten Frösche ausgestorben sind, muss gelten: $68 - (b + g + g') + 2r = 0$ (1)
Da alle gelben Frösche ausgestorben sind, muss gelten: $62 - (b + g + r) + 2g' = 0$ (2)
Da alle braunen Frösche ausgestorben sind, muss gelten: $50 - (r + g + g') + 2b = 0$ (3)
Es folgt: $b + g + g' + r = 68 + 3r = 62 + 3 g' = 50 + 3b$ (4)
Da je Treffen ein Frosch *abhanden kommt,* sind zum Schluß noch
$50+57+62+68 - (b+g+g'+r) = 237 - (68+3r) = 169 - 3r$ Frösche vorhanden.
Es können mithin höchstens 169 Frösche übrig bleiben.

Wie kann man einsehen, dass der Wert 169 auch wirklich angenommen wird ?
Um die größte Zahl von Fröschen zu erschaffen, muß $r = 0$ sein. Aus (4) folgt:
$g' = 2$; $b = 6$; $g = 60$.
Auf folgende Weise lassen sich nun 169 grüne Frösche erzeugen:
(50, 57, 62, 68) ---> (48, 55, 66, 66) (2 Paare gelber Frösche neu erzeugt)
(48, 55, 66, 66) ---> (60, 49, 60, 60) (6 Paare brauner Frösche neu erzeugt)
(60, 49, 60, 60) ---> (0, 169, 0, 0) (60 Paare grüner Frösche neu erzeugt)

Aufgabe 2:
Die Kugel werde z.B an der rechten Bande reflektiert. Wie denken uns den Billardtisch an seiner rechten Bande gespiegelt. Dann kann man sich vorstellen, dass sich die Kugel geradlinig weiter bewegt. Wir führen ein Koordinatensystem ein (Zeichnung):



Die Kugel fällt in ein Loch, wenn sie erstmals einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten erreicht. An den folgenden Punkten trifft die Kugel jeweils die rechte (gespiegelte) Bande:
(1; 19/96), (2; 2*19/96), (3, 3*19/96),...
Da 19 und 96 teilerfremd sind, liegt das erste Loch an der Stelle (96; 19), Auf ihrem Weg durch das Gitternetz hat die Kugel 95 senkrechte Linien und 18 waagerechte Linien überquert, d.h. sie ist 113-mal reflektiert worden.

Aufgabe 3

Die 100 Stammbrüche seien wie folgt numeriert: a_1 , a_2 , ... , a_{100} . O.B.d.A. ersetzen wir das erste Paar a_1 , a_2 durch den Term $a_1+a_2+a_1a_2$. Wegen $1+a_1+a_2+a_1a_2 - 1 = (1+a_1)(1+a_2) - 1$ ist der Term $a_1+a_2+a_1a_2$ äquivalent zum um 1 verminderten Produkt $(1+a_1)(1+a_2)$.
Analog können wir nun etwa die Zahlen $(1+a_1)(1+a_2) - 1$ und a_3 ersetzen durch die Zahl $(1+a_1)(1+a_2) - 1 + a_3 + a_3[(1+a_1)(1+a_2) - 1] = (1+a_1)(1+a_2) - 1 + a_3 - a_3 + (1+a_1)(1+a_2)a_3 = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) - 1$ (nach Vereinfachung und Ausklammern) usw.
Offenbar erhalten wir auf diese Weise nach 99maliger Wiederholung die Zahl

$$P = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \cdot \ldots \cdot (1+a_{100}) - 1 = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{100}) - 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{101}{100} - 1 = 101-1 = \underline{100} .$$