

Vierte Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufen 5 / 6 Die Lösungen der 2. Runde

Aufgabe 1:

Für die Seiten 1 bis 9 benötigt man 9 Ziffern, für die Seiten 10 bis 99 180 Ziffern, für die Seiten 100 bis 999 2700 Ziffern. Für die vierstelligen Seiten verbleiben 3988 Ziffern, also gibt es 997 vierstellige Seitenzahlen, nämlich von 1000 bis 1996. Das Buch hat 1996 Seiten.

Aufgabe 2:

Jungen seien mit J, Mädchen mit M bezeichnet. Die Lösungen lauten MJMJJJM und MJJJMJM. (Da die Lösungen durch Spiegelung auseinander hervorgehen, ist es egal, ob die Essensausgabe links oder rechts gedacht ist.)

Begründung für die Nichtexistenz weiterer Lösungen:

Nach (2) gibt es einen Block der Form MJM. Angenommen, dieser liegt im Inneren der Siebenerkette. Dann gibt es eine Gruppe der Form XMJMY. Wegen (1) müssen X und Y Jungen sein. Dann gibt es eine Gruppe der Form JMJMJ, also zwei Gruppen der Form MJM im Widerspruch zu (3). Also muß der MJM-Block am Rand der Siebenergruppe stehen. Nach (4) gibt es eine JJJ-Gruppe. Angenommen, diese steht auch an Rand. Dann hätte die ganze Anordnung die Form MJMXJJJ oder JJJXMJM. X=J widerspricht (4), X=M widerspricht (1). Also steht die JJJ-Gruppe nicht am Rand. Es bleiben die Möglichkeiten MJMJJJX

bzw. XJJJMJM. X=J widerspricht (4). X=M führt zu den obigen Lösungen.

Aufgabe 3:

Zu a) und b):

Wegen $646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$ lautet die erste Zeile $646 : 19 = 34$. Daher hat die letzte Spalte die Form $34 - h06 = h40$. Dabei soll h die Hunderterstelle bezeichnen.

zu a): 2. Zeile: $1xy - 20 = h06$ ist nur für $h=1$ möglich. Die 2. Zeile lautet also $126 - 20 = 106$.

Die 3. Zeile ergibt sich zu $520 - 380 = 140$.

Bemerkung: Das Problem ist überbestimmt. Auch wenn die Null rechts unten nicht bekannt wäre, ergäbe sich bereits eindeutig die obige Lösung.

Zu b): Für die mittlere Zeile, mittlere Spalte sind 10, 20, 30, 40 und 50 möglich. Für 10 erhält man

$$\begin{array}{r} \boxed{6} \boxed{4} \boxed{6} : \quad \boxed{1} \boxed{9} = \quad \boxed{3} \boxed{4} \\ - \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad + \\ \boxed{h} \boxed{1} \boxed{6} - \quad \boxed{1} \boxed{0} = \boxed{h} \boxed{0} \boxed{6} \\ \hline \boxed{\quad} \boxed{?} \boxed{\quad} - \boxed{1} \boxed{9} \boxed{0} = \boxed{h} \boxed{4} \boxed{0} \end{array}$$

Kombination der 1. Spalte und 3. Zeile liefert $(646 - h16) - 190 = h40$. Probieren von $h=1$ bis 9 (oder Gleichung lösen) liefert $h=2$.

Setzt man in die Mitte 20, erhält man analog $h=1$, also die Lösung aus a).

Setzt man in die Mitte 30, erhielte man $h=0$, das scheidet als Lösung aber aus. Auch für 40 und 50 erhält man keine Lösung. Es gibt also nur die Lösungen

$$\begin{array}{r} \boxed{6} \boxed{4} \boxed{6} : \quad \boxed{1} \boxed{9} = \quad \boxed{3} \boxed{4} \\ - \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad + \\ \boxed{2} \boxed{1} \boxed{6} - \quad \boxed{1} \boxed{0} = \boxed{2} \boxed{0} \boxed{6} \\ \hline \boxed{4} \boxed{3} \boxed{0} - \boxed{1} \boxed{9} \boxed{0} = \boxed{2} \boxed{4} \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{6} \boxed{4} \boxed{6} : \quad \boxed{1} \boxed{9} = \quad \boxed{3} \boxed{4} \\ - \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad + \\ \boxed{1} \boxed{2} \boxed{6} - \quad \boxed{2} \boxed{0} = \boxed{1} \boxed{0} \boxed{6} \\ \hline \boxed{5} \boxed{2} \boxed{0} - \boxed{3} \boxed{8} \boxed{0} = \boxed{1} \boxed{4} \boxed{0} \end{array}$$