Vierte Fürther Mathematik-Olympiade

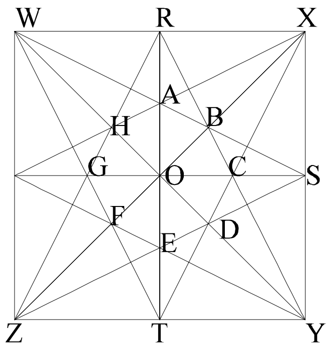
Klassenstufen 9 / 10
Die Lösungen der 1. Runde

<u>Lösung</u> von Aufgabe 1
Die Zahl an der Tafel heiße N. Ist 2n kein Teiler von N, so auch nicht n. Da n und 2n für n>1 nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen sind, müssen demnach 2,3,4,5 1
und 6 Teiler von N sein. Daraus schließen wir weiter: Da 10 = 2 5 und 12 = 3 4 müssen auch 10 und 12 die Zahl N teilen. Demnach können 11 und 13 nicht unter den „Nicht"-Teilern von N sein. Bleiben also die möglichen Nicht-Teiler 7,8 und 9.
<u>Fall I</u> : 8 und 9 teilen N nicht. Das kgV aller verbleibenden Teiler beträgt 2
3 4 5 7 11 13 = 60060. Diese Zahl ist aber größer als 50000. Der Fall kann also nicht eintreten. 2
<u>Fall II</u> : 7 und 8 teilen N nicht. Das kgV der verbleibenden Teiler ist jetzt 4 5 9 11 13 = 25740. Dieses Produkt ist aber kleiner als 50000 und es gilt k 25740 > 50000 für k ≥ 2.
Die angeschriebene Zahl heißt 25 740. ◊

<u>Lösung</u> von Aufgabe 2
Es gibt mehrere Lösungswege: Auf gut Glück läßt sich eine Lösung durch Trial and Error finden. Dies kann schnell zum Ziel führen - aber auch nicht. Ein iterativer Zugang ist jedoch klüger. Da der ursprüngliche Satz jede Ziffer genau einmal enthält, beginnen wir etwa fol-gendermaßen:
Dieser Satz enthält die Ziffer 1 1-mal, die Ziffer 2 1-mal, die Ziffer 3 1-mal und die Ziffer 4 1-mal.

Dies ist aber offensichtlich falsch. Aus den gegebenen Daten können wir aber einen zweiten Satz konstruieren:
Dieser Satz enthält die Ziffer 1 5-mal, die Ziffer 2 1-mal, die Ziffer 3 1-mal und die Ziffer 4 1-mal. 1
Auch dies stimmt (noch) nicht. Wir werden nun so lange jeweils aus dem vorhergehenden Satz einen neuen zusammenbauen, bis dessen Aussage richtig ist.
Dieser Satz enthält Ziffer 1 4-mal, Ziffer 2 1-mal, Ziffer 3 1-mal und Ziffer 4 1-mal (f) 2
Dieser Satz enthält Ziffer 1 4-mal, Ziffer 2 1-mal, Ziffer 3 1-mal und Ziffer 4 2-mal. (f)
Dieser Satz enthält Ziffer 1 3-mal, Ziffer 2 2-mal, Ziffer 3 1-mal und Ziffer 4 1-mal. (f)
Dieser Satz enthält Ziffer 1 2-mal, Ziffer 2 3-mal, Ziffer 3 2-mal und Ziffer 4 1-mal. Diese Aussage ist erstmals wahr. Wir erhalten somit folgendes Lösungsquadrupel :
(x,y,z,w) = (2,3,2,1). ◊
2

Lösung von Aufgabe 3



Im folgenden bezeichne z.B. $|ABCD|$ den Flächeninhalt des Vielecks ABCD. Eine mögliche Lösung bezieht sich auf nebenstehende Figur.

Es sei O die Mitte des Quadrats. Zeichne Hilfslinien OR, OS und OB. Aus Symmetriegründen liegen die Punkte O, 1
A, R bzw. O, C, S auf je einer gemeinsamen Geraden, wobei $\overline{OA} = \overline{OC}$ und daraus $|OBC| = |OBA|$ folgt. C ist aber Schnittpunkt der beiden Diagonalen im Rechteck RXYT, 1
und daher gilt auch : $\overline{OC} = \overline{CS}$.

Demnach sind die Dreiecke OBC und CBS flächengleich: $|OBC| = |CBS|$ (denn we- 1
gen $\overline{OC} = \overline{CS}$ haben die Dreiecke gleiche Basislängen und sind höhengleich). $\Rightarrow$
$|OBA| = \frac{1}{3}|OSA|$. Weiter gilt : $|OBA| = \frac{1}{8}|ABCDEFGH|$ und $|OSA| = \frac{1}{4}|ORXS| =$
$\frac{1}{16}|WXYZ|$. $\Rightarrow |ABCDEFGH| = 8 \cdot |OBA| = \frac{8}{3}|OSA| = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{16}|WXYZ| = \frac{1}{6}|WXYZ|$ 2

$\Rightarrow \frac{|ABCDEFGH|}{|WXYZ|} = \frac{1}{6}$

Die schraffierte Fläche ist also ein Sechstel des gegebenen Quadrates ◊

Summe	15